

- NAIK, V. y M. LEE (1990). "General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns", *The Review of Financial Studies* Vol. 3, N° 4, pp. 493-521.
- NEEMAN, Z. y G. OROSEL (1999). "Herding and the Winner's Curse in Markets with Sequential Bids", *The Journal of Economic Theory* 83(1), marzo, pp. 91-121.
- PADDOCK, J., D. SIEGEL y J. SMITH (1988). "Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases", *Quarterly Journal of Economics* 103, agosto, pp. 479-508.
- PARISI, F. (1998). "Tasas de Interés Nominal de Corto Plazo en Chile: Una Comparación Empírica de sus Modelos", *Cuadernos de Economía* 35, N° 105, agosto, pp. 161-182.
- REED, W. (1993). "The Decision to Conserve or Harvest Old-Growth Forests", *Ecological Economics* 8, 45-69.
- REED, W. y H. CLARKE (1990). "Harvest Decisions and Asset Valuation for Biological Resources Exhibiting Size-Dependent Stochastic Growth", *International Economic Review*, febrero, pp. 147-168.
- ROLL, R. (1977). "An Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics* 5, pp. 251-258.
- RUBINSTEIN, M. (1991). "Buy Now, Choose Later", *Risk*, febrero.
- RUBINSTEIN, M. (1994). "Implied Binomial Trees", *The Journal of Finance* 49, pp. 771-818.
- SICK, G. (1995). "Real Options", en R. Jarrow *et al.*, editores, *Handbooks in Operational Research and Management Science*, volumen 9, pp. 631-691. Elsevier Science.
- SIEGEL, D., J. SMITH y J. PADDOCK (1987). "Valuing Offshore Oil Properties with Option Pricing Models", *Midland Corporate Finance Journal* 5, primavera, pp. 22-30.
- STANTON, R. (1997). "A Non-parametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk", *The Journal of Finance*, Vol. LI, N° 5, diciembre, pp. 1973-2001.
- TRIGEORGIS, L. (1996). *Real Options*. The MIT Press.
- TUCKMAN, B. (1995). *Fixed Income Securities: Tools for Today's Market*. John Wiley & Sons, Inc.
- VASICEK, O. A. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics* 5, pp. 177-188.
- WHALEY, R. (1981). "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics* 9, pp. 207-211.
- WILLMOTT, P., S. HOWISON y J. DEWYNNE (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction*. Cambridge University Press.

## ESTIMANDO UN MODELO DE 2 FACTORES DEL TIPO "EXPONENTIAL-AFFINE" PARA LA TASA DE INTERES CHILENA

SERGIO ZUÑIGA\*

Universidad Católica del Norte

### Abstract

*In this article we estimate a two-factor model for the risk-free term structure yield in Chile. These factors are the short rate and the central tendency that are not directly estimable. Both factors follow an Itô stochastic process. In the solution of the model we follow the Balduzzi et al. (1996) specification, which provides an estimation procedure that do not depend on the parametric specification of the second factor and an "exponential affine" solution type that allows to estimate the model by mean of only one equation.*

*The data used in this study is the average weekly yields of the bonds "Bonos de Reconocimiento" (BR) of the Chilean stock exchange during May 1993 and December 1997. The results show that when we use a stochastic level for the long term rates the yields adjust better than the case when this level is constant. Also, the speed of the reversion process increases due to the better performance of the short term rate. In addition, using an ARCH specification for the rate volatility we found additional evidence that the variance of the rates structure was in fact constant.*

\* Académico de la Escuela de Ingeniería Comercial, Universidad Católica del Norte, Coquimbo, Chile. El autor desea agradecer los valiosos comentarios de Karla Sorra.

## 1. Introducción

En los modelos de tiempo continuo de la ETTI (Estructura Temporal de las Tasas de Interés) las fuentes fundamentales de incertezza son capturadas por la evolución estocástica de ciertos factores, comúnmente modelados por procesos de difusión (procesos de Ito o *brownian motions*), de modo que el número de factores indica el número de procesos empleados en el modelo<sup>1</sup>.

En el tipo de modelo más simple se supone que toda la información relevante en la ETTI es capturada por sólo 1 factor (la tasa instantánea libre de riesgo o tasa corta), y conocido el valor de hoy de la tasa, el modelo es capaz de determinar el resto de la ETTI. Ejemplos de este enfoque son Merton (1970), Vasicek (1977), Brennan y Schwartz (1977), Dothan (1978) y Cox, Ingersoll y Ross (1985, en adelante CIR). La estimación empírica comparativa de estos modelos se ha simplificado fuertemente gracias al trabajo de Chan, Karoly, Longstaff y Sanders (1992, en adelante CKLS), quienes proveen una especificación que abarca a la mayoría de éstos.

Respecto a los modelos de 2 factores, han sido usadas variadas especificaciones para el segundo factor, tales como por ejemplo la tasa larga (Brennan y Schwartz, 1979), el spread entre la tasa larga y la tasa corta (Schaefer y Schwartz, 1984), la tasa de inflación (CIR, 1985), el duration (Schaefer y Schwartz, 1987), la volatilidad de la tasa corta (Longstaff y Schwartz, 1992), y el nivel medio de la tasa corta en una especificación discreta (Naik y Lee, 1993).

Un aspecto que limita la capacidad comparativa de algunos de estos factores es su no-observabilidad, tales como en los modelos de duration, volatilidad y tasa larga. Como veremos, en nuestro caso usaremos un factor de tendencia central estocástico (medias de largo plazo estocásticas), lo que se justifica por una serie de estudios, entre los que mencionamos por ejemplo a Hamilton (1988) quien encuentra cambios de régimen significativos para los rendimientos de los T-Bills de 3 meses de los EEUU, y por Pearson y Sun (1993) quienes encuentran cambios de régimen para los parámetros de la media debido a la nueva política del FED en 1979.

Particularmente el modelo de Longstaff y Schwartz (1992) requiere estimar por métodos no lineales 6 parámetros, y ha sido implementado exitosamente por Longstaff y Schwartz (1993) y por Dahlquist y Svensson (1994), no sin algunas dificultades de convergencia debido al alto número de coeficientes a estimar. En este artículo usamos la especificación desarrollada por Balduzzi, Das, Foresi y Sundaram (1996) para un modelo de dos factores de la ETTI, el cual tiene como principal característica el hecho de entregar un procedimiento de estimación independiente de la especificación paramétrica que se le asigne a la media, es decir, es lo bastante general para estimar rutas intertemporales del nivel de la media sin especificar una forma funcional para ésta.

A modo de introducción, en la siguiente sección mostramos un breve resumen de la metodología que permite derivar y estimar empíricamente los principales modelos de factores, en particular los más simples, los de un solo factor. En las secciones tercera y cuarta se plantea el modelo y se analizan los resultados. Finalmente, en la última sección se presentan las conclusiones.

## II. Esquema de Solución de los Modelos de 1 Factor de la ETTI

El trabajo pionero de Merton (1970) estableció el procedimiento básico de obtención del valor del bono de descuento (es decir la ETTI)<sup>2</sup>, al que siguieron importantes aportes posteriores de Vasicek (1977) y CIR (1985). Los pasos pueden resumirse como sigue:

1. Definir el proceso para la tasa. Puesto que el precio de los bonos de descuento  $P(r,t)$  depende de la actual tasa corta ( $r$ ) y del tiempo ( $t$ ), se supone que los movimientos de la tasa corta ( $dr$ ) siguen un proceso de difusión del tipo:

$$dr = \alpha(r, t)dt + \sigma(r, t)dZ \quad (1)$$

donde

- $\alpha(r,t)dt$  es el componente determinístico y representa el cambio instantáneo (drift) o dirección hacia donde la tasa corta tiende,
- $\sigma(r,t)$  es la desviación estándar instantánea del proceso,
- $dZ$  es el incremento de un brownian motion estándar o proceso Wiener (éste tiene media 0 y desviación estándar 1).

En la práctica es importante que el proceso de la tasa sea homogéneo respecto al tiempo (que los coeficientes  $\alpha$  y  $\sigma$  no dependan del tiempo), puesto que en este caso la tasa esperada de retorno sobre cada bono dependerá del tiempo al vencimiento ( $\gamma$  no del tiempo calendario), y la función del premio por riesgo ( $\lambda$ ) que dependerá sólo de la tasa de interés. En este sentido, una versión particular de este modelo, y que aún es lo bastante general para describir un gran número de modelos de 1 factor de acuerdo al valor que tomen las constantes, es el propuesto por CKLS:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^\beta dZ \quad (2)$$

Este es llamado un proceso de reversión a la media (proceso de Ornstein-Uhlenbeck) donde  $r$  es impulsado hacia  $\theta$  a la velocidad dada por la tasa  $k$ , donde  $\theta$  es la media de largo plazo (en este caso no estocástica), también llamado factor de tendencia central.

En la ecuación 2, cuando  $\beta = 0$  se obtiene el proceso de Vasicek, y cuando  $\beta = 0.5$  se obtiene el proceso de CIR de 1 factor (un problema de  $\beta = 0$ , es que  $r$  puede ser negativa, mientras que con  $\beta = 0.5$  esto es impedido), y ambos son de particular interés porque llevan a modelos fáciles de tratar. Por ejemplo CIR además de obtener la ETTI, derivan soluciones analíticas para precios de Call europeos sobre bonos de descuento.

2. El siguiente paso requiere definir la condición (adicional) de equilibrio de mercado dada por el premio por unidad de riesgo ( $\lambda$ ), la que relaciona la media con la desviación estándar del proceso de la tasa. La condición es:

$$\alpha(r, t) - r = \lambda(r, t)\sigma(r, t) \quad (3)$$

Si bien nada dice que  $\lambda$  deba ser constante, por simplicidad se supone que lo es.

3. Puesto que el valor de un bono de descuento que paga \$1 al vencimiento es  $P(r, \tau)$  ( $\tau$  es el tiempo al vencimiento), es decir, una función del proceso de la tasa, entonces puede usarse el lema de Ito para describir la dinámica del precio del bono o de su rendimiento ( $dP/P$ ), obteniéndose una ecuación diferencial parcial (PDE), conocida como ecuación fundamental de valoración de activos:

La solución de esta PDE junto con la condición adicional de que el precio del bono al vencimiento es  $P(r, 0) = 1$ , entrega el valor del bono de descuento, siendo generalmente una expresión del tipo:

$$P(r, \tau; \theta) = \exp [A(\tau, \theta) - rB(\tau, \theta)] \quad (4)$$

donde  $A(\cdot)$  y  $B(\cdot)$  dependen del modelo particular que se esté usando.

4. Finalmente, para una contrastación empírica, los parámetros son calibrados para reflejar datos de mercado. La Tabla 1 muestra tres de los principales modelos de 1 factor de la ETTI con coeficientes constantes.

A pesar de su relativa sencillez, los modelos de un factor están sujetos a variadas críticas; y una de las principales es que ellos implican que los movimientos de los precios de los bonos de todos los vencimientos están perfectamente correlacionados (en la misma dirección al mismo tiempo). Es decir, debido a la existencia de un único factor, aun cuando la magnitud de un movimiento de precios variará de un bono a otro según su vencimiento y tasa de cupón, la dirección de los cambios de precio serán iguales para todos los bonos que componen la ETTI. La solución natural a este problema son los modelos multifactores, los que generan un mejor ajuste y flexibilidad de la ETTI, a pesar de las dificultades computacionales que involucran. En este sentido a continuación desarrollamos y testearmos un modelo de dos factores, incluyendo como nueva variable de estado estocástica en el modelo, en adición a la tasa de interés, el nivel de equilibrio de largo plazo de las tasas,  $\theta$ .

TABLA 1  
TRES MODELOS DE UN FACTOR DE LA ETTI:  
COMPARACION DE LA ESPECIFICACION FINAL DEL PRECIO DE UN  
BONO DE DESCUENTO

En los tres casos siguientes de modelos de 1 factor, la solución es el precio del bono de descuento, el que tiene la siguiente forma general:

$$P(r, \tau; \theta) = \exp [A(\tau, \theta) - rB(\tau, \theta)]$$

y solamente cambia la especificación de  $A(\cdot)$  y  $B(\cdot)$ .

Autor	Especificación del modelo	Solución
Merton (1970)	$dr = \theta dt + \sigma dz$ $\lambda = 0$	$A(\tau, \theta) = -\frac{\theta}{2}\tau^2 + \frac{\sigma^2}{6}\tau^3$ $B(\tau) = \tau$
Vasicek (1977)	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma dz$ $\lambda$ constante	$A(\tau, \theta) = \frac{(B(\tau, \theta) - \tau)(k(\theta - \lambda) - \lambda\sigma^2/2)}{k^2} - \frac{\sigma^2(B(\tau))^2}{4k}$ $B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k}$
CIR (1985)	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$ $\lambda$ es constante y obtenido endógenamente.	$A(\tau, \theta) = \ln \left\{ \frac{2\delta e^{(k+\delta)\tau/2}}{(\delta + k)(e^{\delta\tau} - 1) + 2\delta} \right\} - \frac{2k\theta/\sigma^2}{2\delta}$ $B(\tau) = \frac{2(e^{\delta\tau} - 1)}{(\delta + k)(e^{\delta\tau} - 1) + 2\delta}$ $\delta = \sqrt{(k + \lambda)^2 + 3\sigma^2}$

Notas:

- Tanto el modelo de Merton como el de Vasicek pueden llevar a que la ETTI sea negativa.
- La característica principal del modelo CIR es que el proceso estocástico de la tasa y la forma funcional de  $\lambda$  son obtenidos endógenamente, de modo que sus resultados son consistentes con un equilibrio general e intertemporal de los mercados de activos.

### III. El Modelo

En el modelo de dos factores que estimamos en este trabajo, el proceso estocástico adoptado para la tasa corta ( $r$ ), como primer factor, es uno de reversión a la media del tipo:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma dz \quad (5)$$

donde  $r$  es la tasa de interés,  $t$  es el tiempo,  $dz$  es un movimiento Browniano,  $k(\theta-r)$  es el *drift* o tasa esperada de cambio y  $\sigma$  es la desviación estándar de los cambios en la tasa de interés. Nótese que  $k$  es la velocidad de reversión a la tasa de interés media, y  $\theta$  es el nivel de equilibrio de largo plazo de las tasas.

El segundo factor define el nivel de la media de largo plazo de las tasas de interés, buscando capturar los cambios de régimen a través de un proceso similar, que toma la siguiente forma:

$$d\theta = (a + b\theta)dt + \eta dW \quad (6)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $\eta$  son parámetros y  $dW$  es un movimiento Browniano. Nótese que el proceso para  $\theta$  es aún bastante general, lo que dará suficiente flexibilidad para testear especificaciones alternativas, tales como un proceso simple de movimiento Browniano aritmético o uno de reversión a la media, e inclusive un proceso con saltos.

La relación entre ambos procesos Wiener estándar es que están correlacionados por  $\rho$ , es decir,

$$dz \cdot dW = \rho dt \quad (7)$$

La expresión para el precio del bono de descuento sigue básicamente la línea descrita en el punto anterior para el caso de un factor, y es de la siguiente forma<sup>4</sup>:

$$P(r, \tau; \theta) = \exp [A(\tau) - rB(\tau) - \theta C(\tau)] \quad (8)$$

donde  $A(\tau)$  y  $C(\tau)$  presentan formas extensas y no son mostradas aquí por cuanto, como veremos, no serán utilizadas. La expresión para  $B(\tau)$  es la siguiente:

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k} \quad (9)$$

la que depende del parámetro de reversión a la media  $k$  en el proceso de la tasa, y no contiene ninguna información acerca de  $\theta$ , lo que implica que es independiente del proceso elegido para  $\theta$ . Esta es una propiedad fundamental en esta clase de soluciones<sup>5</sup>, puesto que  $B(\tau)$  puede ser estimado con sólo conocer  $k$ , y su utilidad se muestra a continuación en el modelo reducido de dos a sólo una ecuación.

Para efectos de la estimación empírica del modelo, el proceso que describe a  $r$  (ecuación 5) es observable directamente, mientras que el proceso para  $\theta$  (ecuación 6) no lo es y debe ser obtenido implícitamente de los datos. CIR (1985), quienes en adición al caso de 1 factor resuelven uno de los primeros modelos multifactores para la ETTI, mostraron el uso de bonos de distintos vencimientos como instrumentos para los factores no observables<sup>6</sup>. Posteriormente este razonamiento fue aplicado empíricamente, entre otros, por Stambaugh (1988) y Sun (1992).

Siguiendo con este procedimiento escribimos el rendimiento de dos bonos de descuento con vencimientos en  $\tau_1$  y  $\tau_2$  respectivamente como:

$$y_1 = y(r, \theta, \tau_1) = \frac{-A(\tau_1) + rB(\tau_1) + \theta C(\tau_1)}{\tau_1} \quad (10)$$

$$y_2 = y(r, \theta, \tau_2) = \frac{-A(\tau_2) + rB(\tau_2) + \theta C(\tau_2)}{\tau_2} \quad (11)$$

Sin embargo el término común  $r$  puede ser eliminado de ambas expresiones con un poco de álgebra. El resultado es:

$$B(\tau_2)y_1\tau_1 - B(\tau_1)y_2\tau_2 = [B(\tau_1)A(\tau_2) - B(\tau_2)A(\tau_1)] + \theta[B(\tau_2)C(\tau_1) - B(\tau_1)C(\tau_2)] \quad (12)$$

El lado derecho de la ecuación anterior no es posible de observar, al contrario del lado izquierdo, que sí es posible de estimar parcialmente con datos de mercado. Puesto que el lado derecho depende linealmente de  $\theta$ , entonces es razonable especificar un modelo lineal para  $\theta$  sobre la base del lado izquierdo de la ecuación, tal como:

$$\theta = a_0 + a_1[y_1\tau_1 B(\tau_2) - y_2\tau_2 B(\tau_1)] \quad (13)$$

Si el proceso anterior es efectivamente lineal, entonces esta relación es válida para cualquier par de bonos. Incorporando la ecuación 13 para  $\theta$  en la ecuación 5 y recordando la expresión de  $B(\tau)$  entregada en la ecuación 9, entonces obtenemos finalmente la expresión para el proceso de la tasa corta.

$$dr = k \left\{ a_0 + a_1 \left[ y_1\tau_1 \left( \frac{1 - \exp^{-k\tau_2}}{k} \right) - y_2\tau_2 \left( \frac{1 - \exp^{-k\tau_1}}{k} \right) \right] - r \right\} dt + \sigma dz \quad (14)$$

Con esto se ha reducido el problema a la estimación de sólo cuatro parámetros ( $a_0$ ,  $a_1$ ,  $k$  y  $\sigma$ ) y a una sola ecuación, es decir, a un modelo de un solo factor.

El paso siguiente consiste en discretizar esta última ecuación para ser estimable con datos de mercado. Para esto usamos la aproximación basada en el esquema de Euler y usada comúnmente (CKLS, 1992; Brenner *et al.*, 1996; Dahlquist 1996; Gray, 1996), dada por:

$$r_t - r_{t-1} = k(\theta_t - r_{t-1}) + e_t \quad (15)$$

donde

$$E(e_t) = 0 \quad \text{y} \quad E(e_t^2) = \sigma^2 \quad (16)$$

Nótese que en este artículo asumimos que la varianza del proceso es constante ( $\sigma^2$ ). Una especificación un tanto más general para la varianza corresponde por ejemplo a un modelo del tipo ARCH, pero por ahora el modelo restringido será aquel donde suponemos que  $\theta$  es constante versus el modelo no restringido dado por la ecuación 13.

Para efectos de estimación del modelo anterior usaremos el método de Máxima Verosimilitud, de modo que el logaritmo de la función de verosimilitud es:

$$L = -\frac{1}{2} \left[ \log(\sigma^2) + \frac{e^2}{\sigma^2} \right] \quad (17)$$

la cual será maximizada por el algoritmo BFGS<sup>7</sup>.

#### IV. Los Datos y los Resultados

Existen algunas dificultades para definir una serie que aproxime bien la tasa corta libre de riesgo en Chile. Actualmente, entre los instrumentos emitidos por el Estado, son cuatro los más activos: los Pagaré Descortables del Banco Central (PDBC), los Pagaré Reajustables del Banco Central (PRBC) y los Pagaré con Cupones del Banco Central (PRC). De ellos, sólo los PRBC y PRC son transados en el mercado secundario, y de éstos últimos sólo los PRBC son bonos de descuento (cupón cero), por lo que reúnen en principio los requerimientos deseados. El cuarto instrumento son los Bonos de Reconocimiento (BR) emitidos por el Instituto de Normalización Previsional (INP). Estos son bonos de descuento y al igual que los anteriores, cuentan con garantía estatal.

Ambos, BR y PRBC, tienen una serie de propiedades deseables en el estudio de las tasas de interés en Chile, sin embargo existen a los menos tres inconvenientes. En primer lugar, el bajo espectro de plazos al vencimiento transados en comparación con otros países desarrollados. En segundo lugar, ambas series son más bien cortas: los BR comenzaron a cotizarse en la Bolsa sólo a partir de marzo de 1992, y más activamente a partir de mayo de 1993, y los PRBC se cotizan desde comienzos de 1987. El último inconveniente se origina en que mientras los BR son de largo plazo (el mayor volumen transado se ubica alrededor de los 9 años al vencimiento), los PRBC son actualmente de muy corto plazo (menos de 90 días al vencimiento)<sup>8</sup>. Este hecho se traduce, como veremos más adelante, en la inconveniencia de tratar ambas series, BR y PRBC, como una sola.

A fin de trabajar con la mayor frecuencia de transacciones que permitan los datos y proveer una mejor aproximación discreta al modelo continuo desarrollado anteriormente, para este estudio usamos información semanal (en vez de mensual) del período que comienza el 17 de mayo de 1993 (semana 1) y termina el 31 de diciembre de 1997 (semana 242).

La Tabla 2 muestra estadísticas de las series de rendimientos de los PRBC con plazos menores a 90 días (PRBC\_90), de los BR con vencimientos menores de 2 años (BR\_02), y de los BR de 5 años (BR\_05), 6 años (BR\_06) y 12 años (BR\_12). Para ahorrar espacio, la última columna reporta resultados que serán obtenidos más adelante. En todas las series encontramos evidencia de sesgo y de curtosis (y rechazamos la hipótesis de un rendimiento medio igual a cero). Para el caso de las primeras diferencias encontramos que estadísticamente las medias son cero, y que también existen sesgo y curtosis, excepto para la primera diferencia de los BR menores de 2 años, en la que sólo se encuentra evidencia de sesgo. Comparando cada serie nótese que tanto el rendimiento medio como la dispersión disminuyen con el plazo al vencimiento, en concordancia con la teoría de equilibrio en los mercados financieros, en el sentido de una relación positiva entre rendimiento y volatilidad. Respecto a la estacionariedad, la Tabla 3 muestra que ambas series, PRBC y BR, no contienen una raíz unitaria de acuerdo a los test tradicionales de Dickey-Fuller y de Phillips-Perron, aunque en pruebas adicionales, reportadas también en la Tabla 3, se detectó una raíz unitaria para los BR de 6 años (BR\_06)<sup>9</sup>.

Debido a que para modelar completamente la ETTI, requerimos de una serie que aproxime a la tasa corta ( $r$ ) como primer factor en la ecuación 5, y de otros dos bonos de un plazo alrededor de 5 y 6 años como variables instrumentales (ecuaciones 10 y 11); entonces se hace natural la idea de usar los PRBC para la tasa corta y los BR para los instrumentos, si efectivamente ambas series comparan niveles de equilibrio de largo plazo que permitan la modelación de la ETTI en todo su espectro. Puesto que los resultados anteriores de estacionariedad sugieren que no se justifica un estudio de cointegración, en la Tabla 4 calculamos la correlación entre las series de PRBC y BR. Aquí puede notarse que las relaciones entre todos los BR son siempre positivas, y particularmente muy altas para BR\_05, BR\_06 y BR\_12, pero las correlaciones entre los PRBC y los BR, si bien son bajas, son negativas<sup>10</sup> para plazos mayores a 5 años, entregando evidencia inicial contraria a la idea de unir ambas series. Por este motivo preferimos trabajar aquí sólo con los BR, y usaremos como proxy de la tasa corta (es decir, del primer factor en el modelo) el rendimiento de los BR menores de 2 años, BR\_02.

Con estos antecedentes pasamos a exponer el proceso de ajuste del modelo a los datos y los resultados obtenidos. Así, se estima en primer lugar el modelo restringido, es decir, asumiendo  $\theta$  constante. Luego estimamos el modelo sin restringir usando la ecuación 13, y finalmente permitimos que la volatilidad ( $\sigma$ ) cambie a través del tiempo usando una especificación ARCH para ésta.

ESTADÍSTICAS DE LAS SERIES DE RENDIMIENTOS DE LOS BR  
DATOS SEMANALES 1993:05:17 - 1997:12:29

Serie	PRBC_90	BR_02	BR_05	BR_06	BR_12	THETA
Observaciones	242	242	242	242	242	242
Media	0.05576	0.07508	0.06816	0.06747	0.06476	0.07506
Error Estándar	0.00779	0.00533	0.00408	0.00397	0.00408	0.00278
Mínimo	0.03252	0.06179	0.06129	0.06136	0.05967	0.06326
Máximo	0.11630	0.09855	0.08535	0.08265	0.08085	0.09815
Sesgo (Sk)	1.81566	0.72503	1.14261	1.03475	1.10182	2.64373
Curtois (Ku)	15.08849	1.84701	1.98157	1.48978	1.47019	20.72043
Niv. Signif. (Media = 0)	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Niv. Signif. (Sk = 0)	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Niv. Signif. (Ku = 0)	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Serie	DPRBC_90	DBR_02	DBR_05	DBR_06	DBR_12	DTHETA
Observaciones	241	241	241	241	241	241
Media	0.00010	0.00000	-0.00002	-0.00003	-0.00002	0.00000
Error Estándar	0.00680	0.00503	0.00149	0.00109	0.00089	0.00259
Mínimo	-0.06474	-0.01639	-0.01127	-0.00581	-0.00433	-0.01935
Máximo	0.03003	0.01842	0.00775	0.00408	0.00329	0.01437
Sesgo (Sk)	-2.86391	0.23994	-1.35937	-0.63817	-0.44605	-1.19889
Curtois (Ku)	35.93693	1.80201	17.50747	4.39423	4.16011	19.70325
Niv. Signif. (Media = 0)	0.82713	0.99668	0.80628	0.64957	0.69076	0.99030
Niv. Signif. (Sk = 0)	0.00000	0.13074	0.00000	0.00006	0.00496	0.00000
Niv. Signif. (Ku = 0)	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

La Curtois aquí reportada es a veces referida como «exceso de curtois», donde la distribución normal tiene un coeficiente de cero.  
PRBC\_90 son los rendimientos de los PRBC menores de 90 días. BR\_02 son los rendimientos de los BR con vencimientos menores de 2 años, BR\_05 son los rendimientos de los BR con vencimientos cercanos a 5 años, etc.  
Deser se son las series generadas de las primas diferencias de las series originales.

PRUEBAS DE LA HIPOTESIS NULA DE EXISTENCIA DE UNA RAIZ UNITARIA  
DATOS SEMANALES 1993:05:17 - 1997:12:29

Serie	Rezagos	ADF	PP	Resultado Pruebas Adicionales al 5%
PRBC_90	2	-6.0167	-7.74751	La serie no tiene raíz unitaria.
BR_02	1	-6.0757	-8.05156	La serie no tiene raíz unitaria.
BR_05	1	-3.3964	-3.35644	Raíz unitaria rechazada. Tendencia lineal significativa. La serie es estacionaria alrededor de una tendencia lineal.
BR_06	0	-3.5388	-3.53878	Drift = 0 rechazado. La serie contiene una raíz unitaria con drift.
BR_12	1	-2.9419	-2.60266	Raíz unitaria rechazada. Tendencia lineal significativa. La serie es estacionaria alrededor de una tendencia lineal.

La longitud óptima del rezago fue seleccionada bajo el criterio de selección de modelos bayesianos (BIC).  
- ADF = Augmented Dickey-Fuller t-test con constante.  
- PP = Phillips-Perron Test con constante.  
- Para ADF y PP los valores críticos son -3.46 (1%), -2.88 (5%), -2.57 (10%).  
- Las pruebas adicionales se basan en una secuencia de tests intentando clasificar las series de acuerdo a las propiedades de tendencia y raíces unitarias. Para esto, el tipo de corrección utilizado es el paramétrico de Dickey y Fuller.

TABLA 4  
MATRIZ DE CORRELACIONES  
DATOS SEMANALES 1993:05:17 - 1997:12:29

	BR_02	BR_05	BR_06	BR_12	PRBC90
BR_02	1.000	0.524	0.470	0.390	0.122
BR_05	0.524	1.000	0.964	0.937	-0.128
BR_06	0.470	0.964	1.000	0.962	-0.138
BR_12	0.390	0.937	0.962	1.000	-0.178
PRBC90	0.122	-0.128	-0.138	-0.178	1.000

#### 4.1. Modelo Restringido vs. Modelo Sin Restringir

La versión más simple del modelo corresponde al caso en que el valor medio de largo plazo de la tasa es constante (*modelo restringido*), es decir, en la ecuación 15,  $\theta_1 = \theta$ . En la Tabla 5 se muestran los resultados de la estimación. Los tres coeficientes estimados son todos altamente significativos, y el parámetro  $\theta$  tiene un valor aquí de 7.51%, virtualmente el mismo de los rendimientos medios de la serie referida al primer factor (BR\_02).

Para estimar conjuntamente  $\theta$  de acuerdo a la ecuación 13 (el *modelo sin restringir*), es decir, las ecuaciones 15 y 16, la proxy que usaremos para las ecuaciones 10 y 11 serán los bonos de 5 años (BR\_05) y de 6 años (BR\_06), es decir  $\tau_1 = 5$  años y  $\tau_2 = 6$  años. Los resultados se muestran en la Tabla 5. Nuevamente todos los coeficientes aparecen significativos y el valor de la función de verosimilitud nos entrega un valor levemente superior al modelo restringido, lo

TABLA 5

ESTIMACION POR MAXIMA VEROSIMILITUD (BFGS)  
DATOS SEMANALES 1993:05:17 - 1997:12:29

	Modelo restringido	Modelo sin restringir	Especificación ARCH
Observaciones Usables	241	241	240
Total Observaciones	242	242	242
Grados de Libertad	238	237	235
Salidas (Skipped)	1	1	2
Valor de la Función	1185.9789	1199.5452	1195.0187
K	0.446596 0.053669 8.321300 0.000000	0.571708 0.053605 10.665210 0.000000	0.537486 0.057460 9.354150 0.000000
$\sigma^2$	0.000020 0.000002 10.917900 0.000000	0.000017 0.000002 10.415900 0.000000	
$\theta$	0.075055 0.000657 114.174580 0.000000		
$a_0$		0.042516 0.005558 7.649810 0.000000	0.042396 0.006594 6.429320 0.000000
$a_1$		0.332818 0.036917 5.847400 0.000000	0.313894 0.064396 4.882030 0.000001
$c_0$			0.000016 0.000002 7.979210 0.000000
$c_1$			0.108479 0.103552 1.047580 0.294834

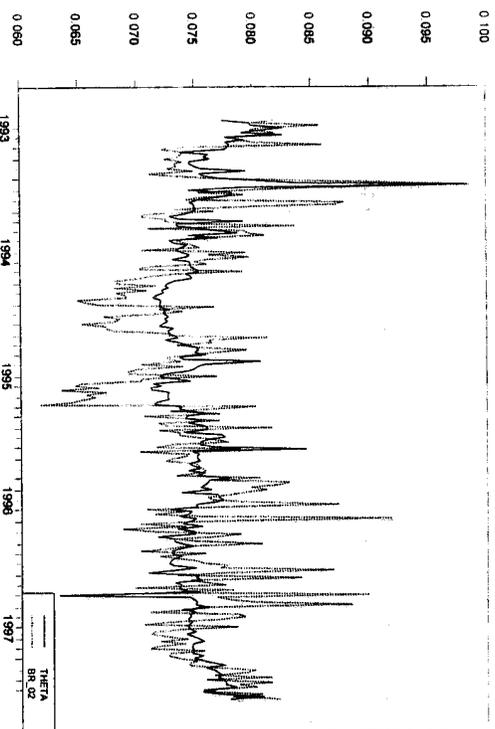
Error estándar, test t y significancia bajo cada coeficiente.

que nos proporciona indicios de un mejor ajuste global, a pesar de que esta no es una prueba formal. El coeficiente de velocidad de reversion aumenta de 0.447 a 0.572, aumentando también su significancia, indicando que el nuevo modelo captura de mejor modo (más rápidamente) las oscilaciones de la tasa BR\_02.

A continuación generamos una serie para  $\theta$ , usando los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  recién estimados. De esta serie obtuvimos las estadísticas que son reportadas en la última columna de la Tabla 2. Como se esperaba, la media de  $\theta$  es la misma que la estimada para el modelo restringido (7.51%), sin embargo presenta una dispersión mucho menor, de modo que el error estándar de BR\_02 es casi el doble del error de  $\theta$  (0.00533 vs. 0.00278), lo que también puede apreciarse al comparar DBR\_02 vs.  $D\theta$ . Este hecho se explica debido justamente a que se espera que BR\_02 oscile alrededor de su valor de largo plazo, lo que indica que la volatilidad en la tasa debe provenir de la volatilidad en  $\theta$ , más otros factores de ruido. En el Gráfico 1 mostramos el comportamiento de ambas series.

GRAFICO 1

COMPORTAMIENTO DE LA TASA DE MENOS DE 2 AÑOS  
VERSUS EL NIVEL MEDIO DE LARGO PLAZO  
DATOS SEMANALES 1993:05:17 - 1997:12:29



#### 4.2. La especificación ARCH

A continuación nos concentraremos en la volatilidad de los residuos del modelo ( $\sigma$ ). Por la ecuación 16, ésta fue especificada como una constante, y así fue estimada en el modelo restringido y en el modelo sin restringir. Una extensión

interesante será entonces especificar un modelo de volatilidad variable en el tiempo ( $\sigma_t^2$ ). El modelo más simple de este tipo es el ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) propuesto por Engle (1982). Es decir:

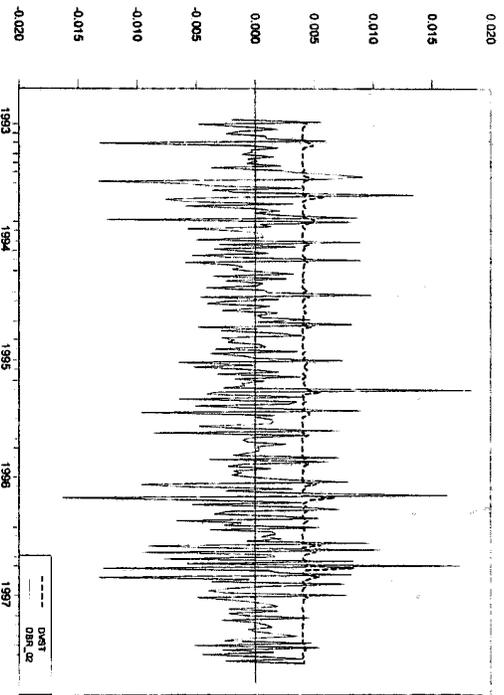
$$E(e_t^2) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 \quad (18)$$

donde  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  son constantes a estimar. Los resultados de la estimación conjunta de esta ecuación con el modelo no restringido anterior son mostrados en la última columna de la Tabla 5. Aquí todos los coeficientes son significativos excepto para  $\alpha_1$  en los niveles estándares. De acuerdo a esto no podemos rechazar la hipótesis de volatilidad constante, y los errores son en realidad homocedásticos. Este resultado lo debemos atribuir a que mucho de esta volatilidad residual es capturada por una tasa media de largo plazo no constante ( $\theta_t$ ), tal como es permitida en este modelo de dos factores. A modo de comparación, para una serie de datos similar pero en el contexto de varios modelos de un solo factor, Zúñiga (1998) encuentra generalmente evidencia de heteroscedasticidad residual para los rendimientos. El Gráfico 2 muestra el comportamiento de la volatilidad estimada (DVST) respecto al cambio en la tasa de menos de 2 años (BR\_02).

Finalmente, puesto que se espera que el modelo estimado represente apropiadamente también a los bonos de muy largo plazo, usamos ahora la tasa de los BR a 12 años (BR\_12) para comparar su comportamiento con el de  $\theta_t$  a través de

## GRAFICO 2

COMPORTAMIENTO DEL CAMBIO SEMANAL EN LA TASA DE MENOS DE 2 AÑOS  
VERSUS LA VOLATILIDAD AJUSTADA POR EL MODELO ARCH  
DATOS SEMANALES 1993:05:17 - 1997:12:29



calcular las correlaciones entre ambas. Los resultados son  $\rho(\theta, BR_{02}) = 0,5058$ ,  $\rho(\theta, BR_{12}) = 0,6400$  y  $\rho(BR_{12}, BR_{02}) = 0,3904$ . Con esto concluimos que  $\theta$  se relaciona en mayor medida con la tasa muy larga que con la tasa de menos de 2 años, tal como es esperado, y estas correlaciones son a su vez mayores a la correlación en la tasa muy larga y la tasa de menos de 2 años. Con esto, esperamos que el modelo en conjunto entregue una apropiada especificación de la tasa muy larga, a pesar de ser obtenido básicamente con la tasa de menos de 2 años, es decir, el primer factor.

## V. Resumen y Conclusiones

Este trabajo trata del ajuste empírico de un modelo de dos factores de la estructura temporal de tasas de interés al mercado chileno. En la primera parte del artículo mostramos, a modo de introducción, la forma en que son derivados analíticamente los modelos de un factor y comentamos las ventajas que presentan los modelos multifactores sobre los anteriores.

A continuación desarrollamos el modelo de dos factores a estimar. El primer factor es el rendimiento libre de riesgo de corto plazo, y el segundo factor es la tendencia central o nivel de equilibrio de largo plazo de la estructura de tasas, el que no es observable directamente, sino que es inferido de los rendimientos de mercado utilizando dos variables instrumentales. Esto último, a su vez, permite reducir el modelo a uno de un solo factor, lo que lo convierte en uno más fácil de estimar luego de discretizar la ecuación diferencial parcial que es solución al modelo. Esta ecuación diferencial estocástica es ajustada a los datos de mercado a través de maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud.

En la estimación empírica, y dadas las limitaciones de los datos chilenos al respecto, decidimos trabajar solamente con datos semanales de los Bonos de Reconocimiento y desechar los Pagarés Reajustables del Banco Central debido a que aparentemente no provienen del mismo proceso generador de retornos. Así, la tasa corta es aproximada por los Bonos de Reconocimiento con menos de 2 años al vencimiento, y como instrumentos son usados los Bonos de Reconocimiento de 5 y 6 años al vencimiento.

Los resultados del modelo restringido (tasa de equilibrio de largo plazo constante) versus el modelo sin restringir (tasa de largo plazo,  $\theta$ , variable) ambos entregan siempre coeficientes altamente significativos estadísticamente. La velocidad de reversión aumenta, indicando que el modelo con  $\theta$  variable puede capturar más rápido las oscilaciones de la tasa corta. Además, la dispersión de  $\theta$  disminuye prácticamente a la mitad, puesto que la tasa corta fluctúa alrededor de  $\theta$ .

Finalmente probamos una especificación ARCH para la volatilidad de la tasa en el modelo que incluye los dos factores. Aquí no pudimos rechazar la hipótesis de homocedasticidad, de modo que es probable que el modelo sea lo suficientemente flexible como para capturar la mayor parte de la volatilidad de modo que un modelo ARCH resulta no significativo.

## Notas

- 1 Un segundo enfoque para la modelación de la ETTI es el de los modelos llamados sin arbitraje (*arbitrage free models*), los que entregan un ajuste exacto a la actual ETTI y son originalmente desarrollados en tiempo discreto. Por ejemplo Ho y Lee (1986) que son los pioneros.
- 2 Para una contraindicación en Chile, véase por ejemplo a Zañiga, 1999.
- 3 Concuerda la expresión para el precio del bono de descuento ( $P$ ) el que paga \$1 al vencimiento, la obtención de la ETTI ( $y$ ) es directa despejando, puesto que  $P = e^{-yT}$ , entonces  $y = -\log(P)/T$ . Sin embargo la obtención en una gráfica convencional de la ETTI de tiempo versus tasas requiere definir el nivel inicial de la tasa corta ( $r_0$ ), de modo que la forma específica de la ETTI (creciente o decreciente, cóncava o convexa) dependerá de ese valor inicial.
- 4 Para seguir una derivación de las expresiones de  $A(\cdot)$  y  $C(\cdot)$  véase a Balduzzi, *et al.* (1996).
- 5 Siguiendo a Duffie y Kan (1996), esta solución es llamada del tipo "exponential-affine", y tiene la propiedad de permitir la solución aproximada de modelos de múltiples factores a través de un modelo de una sola ecuación.
- 6 "...it may be very convenient for empirical applications to use some of the endogenously determined prices as instrumental variables to eliminate the variables that cannot be directly observed", CIR (1981), pág. 399.
- 7 Algoritmo de Brodyden, Fletcher, Goldfarb and Shanno. Para referencias véase por ejemplo a Press, Flannery, Teukolsky y Vetterng (1988), *Numerical Recipes in C*. New York, Cambridge University Press.
- 8 Zañiga (1999) provee una discusión acerca de las características de los instrumentos que aproximan la tasa de interés libre de riesgo en Chile. También se entrega una justificación del uso de los Bonos de Reconocimiento por sobre los PRG y los PRBC en este tipo de estudios.
- 9 Es reconocido que los test actuales de estacionariedad tienen poca potencia para distinguir entre procesos de raíces unitarias y procesos cercanos, por lo que somos cuidadosos en la interpretación de los resultados.
- 10 El signo negativo no debería extrañarnos demasiado, puesto que algunas hipótesis de la estructura de tasas de interés así lo establece. Por ejemplo Modigliani y Stuch (1966), en su teoría del hábitat preferido, suponen que los inversionistas tienen preferencias por ciertos vencimientos, pero que están dispuestos a considerar otros vencimientos si son correctamente compensados, de modo que las primas por riesgo en las tasas puedan tener cualquier signo.

## Referencias

- BALDUZZI, P., S. DAS, S. FORESI y R. SUNDARAM (1996). "Stochastic Mean Models of the Term Structure of Interest Rates". *Working Paper*. Graduate School of Business Administration, Harvard University.
- BRENNAN, M. y E. SCHWARTZ (1977). "Savings Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds". *Journal of Financial Economics* 5, pp. 67-88.
- BRENNAN, M. y E. SCHWARTZ (1979). "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds". *Journal of Banking and Finance*, Vol. 3 (2), pp. 133-156.
- BRENNER, R., R. HARLES y K. KRONER (1996). "Another Look at Models of the Short-Term Interest Rate". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31 (1), pp. 85-101.
- CHAN, K. C., G. A. KAROLY, F. A. LONGSTAFF y A. B. SANDERS (1992). "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate". *Journal of Finance*, 47 (3), pp. 1209-1227.
- COX, J., J. INGERSOLL and S. ROSS (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica* 53, pp. 385-407.
- DAHLQUIST, M. (1996). "On Alternative Interest Rate Processes". *Journal of Banking and Finance*, Vol. 20, pp. 1093-1119.
- DAHLQUIST, M. y L. SVENSSON (1994). "Estimating the Term Structure of Interest Rates with Simple and Complex Functional Forms: Nelson & Siegel vs. Longstaff & Schwartz". *Arbetsrapport* N° 15, marzo, Sveriges Riksbank.

- DOTHAN, U. (1978). "On The Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics* 6, pp. 59-69.
- DUFFIE, D. y R. KAN (1996). "A Yield Factor Model of Interest Rates". *Mathematical Finance*, Vol. 6(4), pp. 379-406.
- ENGLE, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica*, Vol. 50, pp. 391-407.
- GRAY, S. (1996). "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process". *Journal of Financial Economics*, Vol. 42, pp. 27-62.
- HAMILTON, J. D. (1988). "Rational Expectations Econometric Analysis of Change in Regime: An Investigation of the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, pp. 385-423.
- HO, T. y S. LEE (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *Journal of Finance* Vol. 41 (3), pp. 1011-1029.
- LONGSTAFF, F. y E. SCHWARTZ (1992). "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model". *Journal of Finance*, 47, pp. 1259-1282.
- LONGSTAFF, F. y E. SCHWARTZ (1993). "Implementation of the Longstaff-Schwartz Interest Rate Model". *The Journal of Fixed Income*, septiembre, pp. 7-14.
- MERTON, R. (1970). "A Dynamic General Equilibrium Model of the Asset Market and Its Application to the Pricing of the Capital Structure of the Firm". *Working Paper* N° 497-70, A. P. Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- MODIGLIANI, F. y R. SUTCH (1966). "Innovations in Interest Rate Policy". *American Economic Review* 56, pp. 178-197.
- NAIK, V. y M. LEE (1993). "The Yield Curve and Option Prices with Discrete Shifts in Economic Regimes". *Working Paper*, University of British Columbia.
- SCHAEFER, S. y E. SCHWARTZ (1984). "A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19 (4), pp. 413-424.
- SCHAEFER, S. y E. SCHWARTZ (1987). "Time-Dependent Variance and the Pricing of Bond Options". *Journal of Finance*, Vol. 42(3), pp. 1113-1128.
- PEARSON, N. D. y T. S. SUN (1993). "An Empirical Examination of the Cox, Ingersoll and Ross Model of the Term Structure of Interest Rates". *Working Paper*, Columbia University y Rochester University.
- STAMBAUGH, R. (1988). "The Information in Forward Rates: Implications for Models of Term Structure". *Journal of Financial Economics*, 21, pp. 41-70.
- SUN, T. (1992). "Real and Nominal Interest Rates: A Discrete-Time Model and its Continuous-Time Limit". *Review of Financial Studies*, 5, pp. 581-611.