

RIESGO DE TASAS DE INTERES EN OPCIONES DE INTERCAMBIO

SALVADOR ZURITA*

Universidad de Chile

Abstract

Margrabe (1978) studied the problem of the valuation of the option of exchanging one risky asset for another. One interesting feature of the valuation formula that he obtained was that the value of the option was independent of the risk-free rate of interest. In this article we extend Margrabe's result to include assets that pay a dividend yield, and commodities (both commercial and precious). In all cases the initial result holds: the exchange option is independent of the risk-free rate of interest.

1. Introducción

En el mercado Over the Counter se transan opciones sobre materias primas (*commodities*) que tienen la particularidad de que el precio de ejercicio no es constante, sino ligado al precio de otra materia prima. El propósito de este artículo es examinar la exposición al riesgo de tasas de interés de opciones como la descrita. A diferencia de la fórmula obtenida por Black y Scholes (1973) para opciones con precio de ejercicio constante, Margrabe (1978) encontró que el valor de la opción de intercambiar un activo riesgoso por otro (lo que él llamó opciones de intercambio, *exchange options*) es independiente de la tasa de interés. La pregunta que nos interesa contestar es si este resultado se mantiene para otros tipos de activos. La conclusión del trabajo es que la propiedad de independencia de la

* Departamento de Administración. El autor agradece los valiosos comentarios de Gonzalo Cortázar y Carlos Maquieira, así como de dos *referees* anónimos de la *Revista de Análisis Económico*.

tasa de interés se mantiene con tasa de dividendo constante (Margrabe supuso que no había dividendos) y con reversión a la media y retorno por conveniencia estocástico de *commodities* comerciales¹ (tampoco estudiados por Margrabe). En este último caso es posible formar un portafolio libre de riesgo que no requiere inversión inicial tomando posición en la opción y en futuros sobre el precio de los *commodities*, que sí son activos transados.

En la Sección II a modo de introducción revisamos el modelo estudiado por Black y Scholes (1973), y seguimos el trabajo de Margrabe (1978) para considerar el caso cuando el precio de ejercicio es el precio de un activo. Estos resultados se extienden en las Secciones III y IV para incluir opciones sobre acciones que pagan tasa de dividendo conocida y opciones sobre *commodities*. Finalmente, la Sección V presenta las conclusiones.

II. Opciones Sobre Acciones que No Pagan Dividendos

2.1 Precio de ejercicio constante

A modo de introducción, el problema de valorar una opción de compra (*call*) sobre una acción con precio de ejercicio constante fue resuelto en un conocido trabajo pionero por Black y Scholes (B-S) publicado en 1973. Estos autores derivaron una ecuación diferencial parcial que debía ser satisfecha por cualquier instrumento derivado w sobre una acción que no paga dividendos, utilizando un argumento de arbitraje instantáneo. Definiendo (lo que altera un poco la notación para hacerla consistente con lo que sigue):

- w = valor de la opción *call*
- x = precio del activo subyacente (la acción)
- $\bar{x}$ = precio de ejercicio (constante)
- r = tasa de interés anual libre de riesgo
- v = volatilidad del activo subyacente (anual)
- t^* = vencimiento de la opción (en años)
- t = tiempo corriente (en años)

La ecuación para $w(x, t)$ es:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + rx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} v^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = rw \quad (1)$$

La ecuación (1) tiene muchas soluciones, dependiendo de las condiciones de borde que se usen. Por ejemplo, en el caso de una opción de compra, la condición de borde crítica es:

$$w = \max(x - \bar{x}, 0), \quad \text{si } t = t^* \quad (2)$$

en cuyo caso el valor de la opción *call* es:

$$\begin{aligned} w &= xN(d_1) - \bar{x}e^{-r(t^*-t)}N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) + \left(r + \frac{v^2}{2}\right)(t^*-t)}{v(t^*-t)} = \frac{\ln\left(\frac{x}{\bar{x}e^{-r(t^*-t)}}\right) + \frac{v^2}{2}(t^*-t)}{v(t^*-t)} \\ d_2 &= d_1 - v\sqrt{t^*-t} \end{aligned} \quad (3)$$

De la fórmula anterior se desprende que el valor de la opción de compra (w) depende de la tasa de interés libre de riesgo en forma directa: si la tasa de interés libre de riesgo sube, el valor de la *call* sube. Usualmente la sensibilidad del valor de la opción ante cambios en la tasa de interés se mide por el coeficiente RHO_2 :

$$RHO = \frac{\partial w}{\partial r} = \bar{x}(t^*-t)e^{-r(t^*-t)}N(d_2) > 0 \quad (4)$$

La intuición puede obtenerse notando que en el valor de la opción (w) la tasa de interés entra (sólo) para obtener el valor presente del precio de ejercicio: tanto en la fórmula para w como en los parámetros d_1 y d_2 la tasa de interés aparece para traer al presente el precio de ejercicio constante futuro. Una opción de compra sobre una acción es un derecho que equivale a comprar la acción con deuda: paga el precio de la opción al contado, y el precio de ejercicio al vencimiento de la opción.³ Entonces, si sube la tasa de interés el valor presente del monto que se paga al vencimiento disminuye, con lo que el monto pagado hoy (el valor de la opción) debe ser mayor.⁴

2.2 Precio de ejercicio estocástico

Siguiendo a Margrabe (1978), supongamos que el precio de ejercicio no es constante, sino que está ligado al precio de un segundo activo; luego la opción consiste en intercambiar un activo riesgoso por otro, ninguno de los cuales paga ingresos. Entonces, si x_1 y x_2 representan los precios de los dos activos transados (acciones) que no pagan dividendos, suponemos (como en B-S) que su proceso estocástico puede ser descrito por los siguientes Movimientos Brownianos Geométricos:

$$dx_i = x_i[\alpha_i dt + v_i dz_i] \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

donde:

- α_i = tasa de retorno esperado del activo i
- v_i = volatilidad del retorno del activo i
- dz_i = un (pequeño) incremento de un proceso de Wiener.

Además, los precios de los activos pueden estar correlacionados entre sí:

ρ_{12} = correlación entre dz_1 y dz_2 (puesto que son normal estándar también representa su covarianza).

Denotamos el valor en t de una opción europea que puede ser ejercida sólo en t^* por $w(x_1, x_2, t)$, con lo cual su pago al vencimiento será $x_1 - x_2$ si es ejercida, y cero en caso contrario (condición inicial):

$$w(x_1, x_2, t^*) = \max(x_1 - x_2, 0) \quad (6)$$

Conviene notar que:

- Esta opción es simultáneamente una opción de compra sobre el activo 1 con precio de ejercicio x_2 y una opción de venta sobre un activo 2 con precio de ejercicio x_1 .
- Si los activos valen al menos cero, la opción vale al menos cero y no más que x_1 (condiciones de borde):

$$0 \leq w(x_1, x_2, t) \leq x_1 \quad (7)$$

Por el Lema de Ito, el proceso estocástico de la opción es:

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \alpha_1 x_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \alpha_2 x_2 + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} v_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} v_2^2 x_2^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 v_2 \rho_{12} x_1 x_2 \right) dt + \frac{\partial w}{\partial x_1} v_1 x_1 dz_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} v_2 x_2 dz_2 \quad (8)$$

Es posible formar un portafolio libre de riesgo combinando posiciones en la opción y en los activos 1 y 2, tomando:

- 1 posición larga (compra) en la opción,
- 1 posición corta (venta) de $w_1 \equiv \partial w / \partial x_1$ unidades del activo 1, y
- 1 posición larga (compra) de $-w_2 \equiv -\partial w / \partial x_2$ unidades del activo 2.

Si denotamos por Π el valor del portafolio:

$$\Pi = w - w_1 x_1 - w_2 x_2 \quad (9)$$

El incremento en el valor del portafolio en un pequeño intervalo de tiempo es:

$$d\Pi = dw - w_1 dx_1 - w_2 dx_2$$

Sustituyendo (5) y (8) en la ecuación anterior se obtiene:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \alpha_1 x_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \alpha_2 x_2 + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} v_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} v_2^2 x_2^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 v_2 \rho_{12} x_1 x_2 \right) dt + \frac{\partial w}{\partial x_1} v_1 x_1 dz_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} v_2 x_2 dz_2 - \frac{\partial w}{\partial x_1} x_1 [\alpha_1 dt + v_1 dz_1] - \frac{\partial w}{\partial x_2} x_2 [\alpha_2 dt + v_2 dz_2]$$

O bien, simplificando términos,

$$d\Pi = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} v_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} v_2^2 x_2^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 v_2 \rho_{12} x_1 x_2 \right) dt \quad (10)$$

En relación a la inversión inicial requerida Π , nótese que la función $w(\cdot)$ debe ser lineal homogénea en x_1 y x_2 (ver Teorema 8,9 en Merton, 1973):

$$\lambda w(x_1, x_2, t) = w(\lambda x_1, \lambda x_2, t) \quad (11)$$

Una forma de ver la intuición de (11) es hacer el siguiente ejercicio hipotético:

- Primero considere la distribución de pagos de una opción para cambiar el activo 2 (el activo 2 hace las veces de precio de ejercicio) por el activo 1. Esta distribución de pagos se vende en $w(x_1, x_2, t)$.
- Segundo, en un mercado de capitales perfecto (donde todos los participantes son tomadores de precios), la distribución de pagos de λ opciones para cambiar el activo 2 por el activo 1 se vende en $\lambda w(x_1, x_2, t)$.
- Tercero, considere la distribución de pagos de la opción para cambiar el activo 2 por el 1 cuando ambos activos se venden en λ veces su precio en el primer caso. Denotemos este valor como $w(\lambda x_1, \lambda x_2, t)$.

Económicamente, la distribución de pagos en el caso 3 es idéntica al caso 2, dados los procesos de Ito para los precios de los activos 1 y 2. Luego, los pagos en el caso 2 deben tener igual precio que en el caso 1, probando (11).

Pero si $w(\cdot)$ es homogénea lineal, podemos aplicar el Teorema de Euler (Layard and Walters, 1978, p. 399):

$$w = w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad (12)$$

Pero esto implica que la inversión inicial requerida para formar el portafolio libre de riesgo (10) es cero. Esto significa que para eliminar el riesgo se requiere eliminar toda la inversión. Por esto, en ausencia de oportunidades de arbitraje, el

retorno de esta inversión en un pequeño intervalo de tiempo (ecuación 5) también debe ser cero:

$$d\Pi = 0 \quad (13)$$

en otras palabras, sustituyendo (10) en (13):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} v_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} v_2^2 x_2^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 v_2 \rho_{12} x_1 x_2 = 0 \quad (14)$$

Esta es la ecuación de valoración, y el valor de la opción se obtiene resolviendo (14) para $w(\cdot)$ sujeto a la condición inicial (6) y a la condición de borde (7). Para nuestros efectos la característica importante de la ecuación (14) es que a diferencia de la ecuación diferencial de B-S (1), no depende de la tasa de interés libre de riesgo. Puesto que las condiciones inicial y de borde tampoco dependen de la tasa de interés libre de riesgo, ello implica que la solución $w(\cdot)$ es independiente de la tasa de interés r , en otras palabras, que $RHO = 0$. La intuición de este resultado es como sigue: si el precio de ejercicio es constante, una alza en la tasa de interés baja su valor presente, pero si el precio de ejercicio es el valor de un activo, entonces cualquier efecto de movimientos en la tasa de interés ya está incluido en el precio del activo, no hay efectos adicionales al precio del activo, por lo que la derivada parcial debe ser cero.⁵

Además, conviene notar que (14) puede ser convertido en la ecuación de B-S (1) por medio de una transformación de variables. Para ello, tomemos el activo 2 como numerario. Luego el precio del activo 2 en términos de sí mismo es 1, y el precio del activo 1 es $x \equiv x_1/x_2$. Puesto que el valor de la opción es linealmente homogéneo, su precio (en unidades del activo numerario) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t)/x_2 &= w(x_1/x_2, 1, t) = w(x, t) \\ \rightarrow w(x_1, x_2, t) &= x_2 w(x, t) \end{aligned} \quad (15)$$

Ello implica que las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= x_2 \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} &= \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \frac{1}{x_2}, \\ \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} &= w(x, t) - \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} x \rightarrow \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} x^2 \frac{1}{x_2}, \\ \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \frac{1}{x} \frac{1}{x_2} \end{aligned} \quad (16)$$

Sustituyendo (16) en (14), se obtiene la ecuación diferencial parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{1}{x_2} v_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x^2 \frac{1}{x_2} v_2^2 x_2^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x \frac{1}{x_2} v_1 v_2 \rho_{12} x_1 x_2 &= 0 \\ \rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x^2 v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x^2 v_2^2 x_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x^2 v_1 v_2 \rho_{12} x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Simplificando términos,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

donde,

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \rho_{12} \quad (18)$$

puede interpretarse como la varianza del cociente entre los precios de los dos activos:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\frac{d(x_1/x_2)}{(x_1/x_2)} \right) / dt &= \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 \text{Var} \left[\frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_1^2} \right] / dt \\ &= \left(\frac{1}{x_1 x_2} \right)^2 (x_2^2 x_1^2 v_1^2 + x_1^2 x_2^2 v_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 v_1 v_2 \rho_{12}) = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \rho_{12} = v^2 \end{aligned}$$

La condición inicial (6) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t^*) &= \max(x_1 - x_2, 0) = x_2 \max(x - 1, 0) \\ \rightarrow w(x, t^*) &= \max(x - 1, 0) \end{aligned} \quad (19)$$

Conviene notar que (17) es un caso especial de la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes (1), donde la tasa de interés libre de riesgo es cero, y el precio de ejercicio es 1. La intuición es como sigue: si el activo 2 es utilizado como numerario, el que presta 1 unidad del activo 2 demanda sólo 1 unidad del activo 2 como pago del principal, es decir no cobra interés en el crédito porque la apreciación del activo 2 en el período del crédito es una compensación de equilibrio por su inversión y riesgo⁶. Así, tomando el activo 2 como numerario,

la opción de intercambiar el activo 2 por el activo 1 es una opción de compra (*call*) sobre el activo 1, donde el precio de ejercicio es 1 y la tasa de interés libre de riesgo es igual a 0. Sustituyendo en la fórmula de Black y Scholes (3),

$$w(x, t) = xN(d_1) - 1 \cdot e^{-0(t^*-t)}N(d_2) \\ \rightarrow w(x_1/x_2, t) = \frac{x_1}{x_2}N(d_1) - N(d_2) \quad (20)$$

donde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \left(0 + \frac{v^2}{2}\right)(t^*-t)}{v(t^*-t)} = \frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \frac{v^2}{2}(t^*-t)}{v(t^*-t)} \\ d_2 = d_1 - v\sqrt{t^*-t} \\ v = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\rho_{12} \quad (21)$$

Nuevamente por la propiedad de homogeneidad lineal de la función $w(\cdot)$, multiplicando (20) por el precio del activo 2 a ambos lados, se obtiene:

$$w(x_1, x_2, t) = x_1N(d_1) - x_2N(d_2) \quad (22)$$

con d_1 y d_2 definidos en (21). Esta es la fórmula de Margrabe (1978).

III. Opciones Sobre Acciones que Pagan Tasa de Dividendo Constante

3.1 Precio de ejercicio constante

En este caso el proceso estocástico del precio de la acción en (5) debe modificarse para incluir la tasa de dividendo δ :

$$dx_t = x_t(\alpha_t - \delta)dt + v_t dz_t \quad (23)$$

Ello implica que la ecuación diferencial de B-S se modifica restando la tasa de dividendos δ de la tasa de interés libre de riesgo que multiplica el precio de la acción (ver Hull, 1999, p. 304):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (r - \delta)x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = rf \quad (24)$$

sujeto a las condiciones iniciales descritas en (2). La solución es (ver Hull (1999), p. 275):

$$w = x_1 e^{-\delta(t^*-t)}N(d_1) - \bar{x} e^{-r(t^*-t)}N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x_1}{\bar{x}}\right) + \left(r - \delta + \frac{v^2}{2}\right)(t^*-t)}{v(t^*-t)} \quad (25)$$

$$d_2 = d_1 - v\sqrt{t^*-t}$$

Esta fórmula fue originalmente desarrollada por Merton (1973).

3.2 Precio de ejercicio estocástico

Consideremos ahora el caso en que el precio de ejercicio es el valor de otro activo, y ambos (el subyacente y el ligado al precio de ejercicio) pagan tasas de dividendo δ_1 y δ_2 , respectivamente. Entonces (23) representa sólo el cambio de precios de los activos, ya no el cambio en la riqueza de un inversionista que compra esos activos. Pero todavía es posible formar el mismo portafolio libre de riesgo tomando posición larga en el derivado y corta en los activos 1 y 2, obteniéndose el cambio en el valor del portafolio descrito por (10). Por la propiedad de homogeneidad lineal, esta inversión no requiere inversión inicial, según (12). Pero ahora la condición de no arbitraje (13) debe modificarse para incluir los dividendos: el cambio en la riqueza (ganancias de capital más dividendos) debe ser cero porque la inversión inicial es cero:

$$d\Pi - w_1x_1\delta_1 - w_2x_2\delta_2 = 0 \quad (26)$$

Luego sustituyendo (10) en (26), se obtiene la ecuación de valoración que sigue:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x_1}\delta_1x_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2}\delta_2x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}v_1^2x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}v_2^2x_2^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}v_1v_2\rho_{12}x_1x_2 = 0 \quad (27)$$

Por la propiedad de homogeneidad todavía es posible usar el activo 2 como numerario, según la ecuación (15), implicando (16). Sustituyendo (16) en (26) se escribe la ecuación para $w(x, t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x}\delta_1x_2 - \left[w - \frac{\partial w}{\partial x}x\right]\delta_2x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}x^2x_2v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}x^2x_2v_2^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}x^2v_1v_2\rho_{12}x_2 = 0$$

Reuniendo términos:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\delta_2 - \delta_1)x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w\delta_2 \quad (28)$$

con v definido en (18).

Esta ecuación es igual a (23), si se interpreta la tasa de dividendo del activo 2 (δ_2) como tasa de interés libre de riesgo y el activo subyacente paga tasa de dividendo constante (igual a δ_1). Además, por igual argumento que antes, la condición inicial puede ser escrita como (19).

La intuición es como sigue: si el activo 2 es usado como numerario, el que presta 1 unidad del activo 2 demanda como pago del principal 1 unidad del activo 2, más el ingreso que ha sido pagado por el activo 2 en el plazo transcurrido, puesto que la rentabilidad esperada del activo 2 (ganancia de capital más dividendo) representa una compensación de equilibrio para su inversión, dado el riesgo asumido. Así, definiendo el activo 2 como numerario, la opción de intercambiar el activo 2 por el activo 1 es una opción de compra (*call*) sobre el activo 1, donde el precio de ejercicio es 1 y la tasa de interés libre de riesgo es igual a δ_2 . Sustituyendo en (23), el valor de la opción es:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= x e^{-\delta_1(t^*-t)} N(d_1) - 1 \cdot e^{-\delta_2(t^*-t)} N(d_2) \\ \rightarrow w(x_1 / x_2, t) &= \frac{x_1}{x_2} e^{-\delta_1(t^*-t)} N(d_1) - e^{-\delta_2(t^*-t)} N(d_2) \end{aligned} \quad (29)$$

con:

$$\begin{aligned} \rightarrow w(x_1, x_2, t) &= x_1 e^{-\delta_1(t^*-t)} N(d_1) - x_2 e^{-\delta_2(t^*-t)} N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + (\delta_2 - \delta_1 + \frac{v^2}{2})(t^* - t)}{v(t^* - t)} \\ d_2 &= d_1 - v\sqrt{t^* - t} \\ v &= v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\rho_{12} \end{aligned} \quad (30)$$

Nótese que (28) es también la fórmula para el valor de la opción de tipo de cambio, con la sola diferencia en (29) que, puesto que el precio de ejercicio es constante en ese caso, v no corresponde a la suma de esos términos, sino a la volatilidad del tipo de cambio *spot*. En lo que se refiere a riesgo de tasas de interés, es importante señalar que debido a que el portafolio no requiere inversión, nuevamente se obtiene el resultado $RHO = 0$.

IV. Opciones Sobre Commodities

Se argumenta que existen beneficios que recibe el que tiene el *commodity* comercial en inventario, pero no el que tiene un contrato futuro sobre el *commodity*. Este flujo de servicios se ha denominado retorno por conveniencia y juega el mismo papel que la tasa de dividendos en el proceso estocástico del precio de

acciones. Estos beneficios pueden incluir la capacidad de beneficiarse de escasez local del *commodity*, o la de mantener sin interrupción el proceso productivo. Hay varios modelos que se han planteado en la literatura para representar la evolución en el tiempo del precio de un *commodity*, según la forma como se modele ese retorno por conveniencia.

Se conjetura que el precio de un *commodity* sigue el siguiente proceso estocástico, similar a las acciones, pero interpretando la tasa de dividendo como tasa de retorno por conveniencia (ecuación 23):

$$dx_t = x_t(\alpha_t - \delta_t)dt + v_t dz_t \quad (23)$$

Los primeros trabajos en la literatura supusieron que la tasa de interés y el retorno por conveniencia eran constantes, por ejemplo Brennan y Schwartz (1985):

Modelo 1: $\delta = c = \text{constante}$

Otra posibilidad es suponer que el retorno por conveniencia es estocástico, pero función determinística del precio del *commodity*, con lo cual el precio del *commodity* y su retorno por conveniencia tienen correlación perfecta (igual a uno).

Modelo 2: δ perfectamente correlacionado con el precio de contado del *commodity*, por ejemplo:

$$\delta_t(x_t) = \kappa_t \ln x + \alpha_t(1 - \kappa_t) \quad (31)$$

Sustituyendo (31) en (23) se obtiene un modelo similar al propuesto por Ross (1997).

$$dx_t = \kappa_t(\alpha_t - \ln x_t)x_t dt + v_t dz_t \quad (32)$$

Este es un modelo de un factor (el precio de contado del *commodity*) que supone que el logaritmo del precio del *commodity* sigue un proceso con reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck, donde:

κ = velocidad de ajuste, que mide el grado de reversión a la media al promedio del logaritmo del precio de largo plazo.

Este modelo tiene tres propiedades deseables para *commodities* comerciales en relación al anterior:

- (a) La correlación positiva entre el retorno por conveniencia y el precio de contado del *commodity*: cuando el precio del *commodity* sube, ello es indicativo de escasez relativa, por lo que su retorno por conveniencia debiera ser alto, y análogamente el precio del *commodity* debiera ser bajo si hay abundancia relativa, con lo cual su retorno por conveniencia debiera ser bajo.

- (b) Incorpora reversión a la media en el precio, consistente con la evidencia para *commodities* comerciales. En efecto, en los mercados bursátiles la oferta de acciones (el número de acciones en circulación) está dada, con la sola excepción discontinua e infrecuente de algunos movimientos de capital (emisión de acciones de pago, emisión de acciones liberadas, canje, etc). Pero en los mercados de *commodities* la oferta es endógena, y responde a los precios de mercado: en un contexto de equilibrio, esperamos que cuando el precio sea relativamente alto, la oferta del *commodity* aumente puesto que productores con mayores costos entrarán en el mercado, poniendo una presión a la baja sobre el precio. A la inversa, cuando el precio sea relativamente bajo, la oferta disminuirá puesto que algunos de los productores con mayores costos saldrán del mercado, poniendo una presión a la baja sobre el precio. El impacto de precios relativos sobre la oferta del *commodity* induce reversión a la media en los precios de los *commodities*, con lo que la volatilidad de los precios futuros es menor que la volatilidad de los precios de contado.

- (c) Un retorno por conveniencia constante como en el modelo 1 no puede capturar cambios en la estructura temporal de precios futuros que sí son posibles con el modelo 2, por ejemplo desde *backwardation* a *contango* o viceversa.⁷

Un tercer modelo propuesto en la literatura es Gibson y Schwartz (1990), que es un modelo de dos factores: el primer factor es el precio de contado del *commodity* como en (23) y el segundo factor es el retorno por conveniencia instantáneo que sigue un proceso estocástico con reversión a la media y está positivamente correlacionado con el precio de contado del *commodity*:

Modelo 3: Modelo de dos factores

$$\begin{aligned} dx &= (\mu - \delta)xdt + vx dz \\ d\delta &= \kappa(\alpha - \delta)dt + sdy \\ dz \times dy &= \rho dt \end{aligned} \quad (33)$$

En la ecuación anterior, μ representa el retorno esperado del *commodity*, δ el retorno por conveniencia instantáneo (estocástico), v la volatilidad del precio del *commodity*, κ la velocidad de ajuste que indica el grado de reversión a la media del retorno por conveniencia a su promedio de largo plazo α , y ρ es el coeficiente de correlación entre los dos procesos.

Finalmente Schwartz (1997) extiende el modelo anterior para incluir un tercer factor, la tasa de interés libre de riesgo.

Modelo 4: Modelo de tres factores

Los factores estocásticos o variables de estado son el precio del *commodity*, el retorno por conveniencia instantáneo y la tasa de interés instantánea, que se supone sigue un proceso de reversión a la media simple, del tipo Ornstein-Uhlenbeck:

Schwartz (1997) compara los modelos 2, 3 y 4 para *commodities*, obteniendo resultados diferentes según el tipo de *commodities*.

En el caso de *commodities* comerciales (cobre, petróleo) se detecta una fuerte reversión a la media (que descarta el modelo 1), pero no en el caso de *commodities* preciosos (oro). En el caso del oro el modelo de un factor (modelo 2) no pudo ajustar bien los datos, lo que se consideró una primera indicación que no hay reversión a la media. Al ajustar para el oro el modelo de dos factores (modelo 3) se encontró reversión a la media en uno de los subperíodos en su retorno por conveniencia aunque de magnitud muy inferior a los otros *commodities*. Esta reversión desaparece al incluir tasas de interés estocásticas (modelo 4), lo que sugiere que la reversión a la media en el modelo de dos factores es un *proxy* para la reversión a la media de las tasas de interés que se suponen constantes en dicho modelo. En conclusión, en el caso de metales preciosos el modelo con retorno por conveniencia constante (modelo 1) parece razonable, pero no para *commodities* comerciales.

Por otra parte, en lo que se refiere a *commodities* comerciales, el modelo de un factor (modelo 2) no explica tan bien los datos como los modelos de dos o tres factores (modelos 3 y 4), siendo estos últimos muy similares en su capacidad para explicar las características de la estructura temporal de precios futuros y volatilidades. En conclusión, el modelo de dos factores (modelo 3), que supone tasas de interés constantes, es un modelo razonable para *commodities* comerciales.

En lo que sigue veremos el riesgo de tasa de interés para los dos tipos de *commodities*.

4.1 Precio de ejercicio constante

a. *Commodities* preciosos

Los *commodities* preciosos son activos en el sentido usual, puesto que son demandados por un número importante de inversionistas con propósito de inversión. Como hemos visto, para estos *commodities* no hay evidencia de retorno por conveniencia variable, debido a que no son demandados principalmente por su valor de consumo en el proceso productivo y tampoco de reversión a la media, presumiblemente porque el flujo de producción de ellos es un porcentaje pequeño del *stock* acumulado. Con retorno por conveniencia constante igual a cero, la fórmula para el valor de una opción sobre un *commodity* precioso con precio de ejercicio constante es la de Black y Scholes (3) con sensibilidad ante cambios en la tasa de interés positiva (4).

b. *Commodities* comerciales

El retorno por conveniencia de un *commodity* comercial no es un activo en el sentido usual porque no puede ser transado, por lo que su precio se interpreta más bien como una variable de estado sobre la que se pueden escribir derechos contingentes. Así, en el modelo de un factor con retorno por conveniencia estocástico pero correlacionado perfectamente con el precio del *commodity*, el precio del *commodity* se trata como variable de estado. En el modelo de dos factores (modelo 3) el precio del *commodity* se puede tratar como activo usual que paga tasa de dividendo estocástica, pero el segundo factor (el retorno por conveniencia) representa una variable de estado, y tiene un precio de mercado del riesgo asociado. Puesto que el modelo 3 (modelo de dos factores) es una representación adecuada para *commodities* comerciales, utilizaremos este modelo. Para enfrentar el problema que presenta el retorno por conveniencia⁸ estudiaremos el problema similar de una opción sobre un futuro⁹ (que sí es un activo transado) del *commodity* comercial. Como el precio futuro converge al precio spot al vencimiento, si el futuro vence junto con la opción, el valor de la opción sobre futuro debe ser igual al valor de la opción sobre el *commodity*.

Janshidian y Fein (1990) y Bjerkstrand (1991), citados en Schwartz (1997), mostraron que en el modelo de dos factores el precio futuro del *commodity* es:

$$F(x, \delta, t^* - t) = x \exp \left[-\delta \frac{1 - e^{-\kappa(t^* - t)}}{\kappa} + A(t^* - t) \right], \text{ donde} \quad (35)$$

$$A(t^* - t) = \left(r - \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{s^2}{\kappa^2} - \frac{vs\varrho}{\kappa} \right) (t^* - t) + \frac{1}{4} s^2 \frac{1 - e^{-2\kappa(t^* - t)}}{\kappa^3}$$

$$+ \left(\hat{\alpha}\kappa + vs\varrho - \frac{s^2}{\kappa} \right) \frac{1 - e^{-\kappa(t^* - t)}}{\kappa^2}$$

y que el valor de una opción europea sobre un futuro con precio de ejercicio constante $\bar{x}$ puede expresarse en términos del precio futuro (35) y de la volatilidad del precio futuro $\sigma(t^* - t)$ como:

$$w = e^{-r(t^* - t)} [FN(d_1) - \bar{x}N(d_2)] \quad \text{donde}$$

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{F}{\bar{x}} (r - \delta) \right)}{\sqrt{\sigma(t^* - t)}} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(t^* - t)}, \quad (36)$$

$$\sigma(t^* - t) = \left(v^2 + \frac{s^2}{\kappa^2} - \frac{2vs\varrho}{\kappa} \right) (t^* - t) + \frac{s^2(1 - e^{-2\kappa(t^* - t)})}{2\kappa^3} + 2s\left(v\varrho - \frac{s}{\kappa}\right) \frac{1 - e^{-\kappa(t^* - t)}}{\kappa^2}$$

Nótese que (36) implica que la opción depende de la tasa de interés, RHO no es cero.

4.2 Precio de ejercicio estocástico

a. *Commodities* preciosos

Si el precio de ejercicio está ligado a otro *commodity* precioso, entonces es posible formar un portafolio libre de riesgo y que no requiere inversión inicial, obteniendo la fórmula de Margrabe (22) en que el valor de la opción no depende de la tasa de interés, RHO = 0.

b. *Commodities* comerciales

Suponiendo ahora que tanto el activo subyacente como el precio de ejercicio corresponden a *commodities* que son transados mayoritariamente por razones de consumo, el proceso estocástico conjunto de sus precios y retornos por conveniencia puede escribirse como:

$$dx_i = (\mu_i - \delta_i)x_i dt + v_i x_i dz_i, \quad i = 1, 2$$

$$d\delta_j = \kappa_j (\alpha_j - \delta_j) dt + s_j dy_j, \quad j = 1, 2$$

$$dz_i dy_j = \rho_{ij}^{\alpha\alpha}$$

$$dz_i dz_j = \rho_{ij}^{\alpha\delta}$$

$$dy_i dy_j = \rho_{ij}^{\delta\delta} \quad (37)$$

Supongamos ahora que existen futuros sobre los *commodities*, y consideremos el valor de una opción europea que consiste en intercambiar un contrato futuro del *commodity* 1 por un contrato futuro del *commodity* 2. Tanto la opción como los dos futuros son activos transados, no reciben retorno por conveniencia (que sí puede recibir el tenedor de los *commodities* mismos).

Denotemos los instrumentos involucrados por:

$$f_1(x_1, \delta_1, x_2, \delta_2, t) = \text{el valor del futuro sobre el commodity 1}$$

$$f_2(x_1, \delta_1, x_2, \delta_2, t) = \text{el valor del futuro sobre el commodity 2}$$

$$w(f_1, f_2, t) = \text{el valor de la opción a intercambiar un contrato futuro del commodity 1 por el del commodity 2.}$$

Por el lema de Ito, el proceso estocástico que siguen los futuros transados puede ser descrito por:

$$df_j = \left[\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\partial f_j}{\partial x_1} (\mu_1 - \delta_1) x_1 + \frac{\partial f_j}{\partial \delta_1} \kappa_1 (\alpha_1 - \delta_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_1^2} v_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial \delta_1^2} s_1^2 + \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_1 \partial \delta_1} v_1 s_1 x_1 \rho_{11}^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial f_j}{\partial x_2} (\mu_2 - \delta_2) x_2 + \frac{\partial f_j}{\partial \delta_2} \kappa_2 (\alpha_2 - \delta_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_2^2} v_2^2 x_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial \delta_2^2} s_2^2 + \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_2 \partial \delta_2} v_2 s_2 x_2 \rho_{22}^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_1 \partial \delta_2} v_1 s_2 x_1 \rho_{12}^2 + \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_2 \partial \delta_1} v_2 s_1 x_2 \rho_{21}^2 + \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 v_2 x_1 x_2 \rho_{12}^2 + \frac{\partial^2 f_j}{\partial \delta_1 \partial \delta_2} s_1 s_2 \rho_{12}^2 \right] dt \\ + \frac{\partial f_j}{\partial x_1} v_1 x_1 dz_1 + \frac{\partial f_j}{\partial \delta_1} s_1 d\delta_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x_2} v_2 x_2 dz_2 + \frac{\partial f_j}{\partial \delta_2} s_2 d\delta_2; \quad i, j = 1, 2 \quad (38)$$

y el proceso estocástico que sigue la opción de intercambio de futuros es:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial w}{\partial f_2} df_2 + \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial f_1^2} df_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial f_2^2} df_2^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial f_1 \partial f_2} df_1 df_2 \quad (39)$$

Entonces, como antes, es posible formar un portafolio libre de riesgo combinando posiciones en la opción y en los activos 1 y 2 tomando:

- 1 posición larga (compra) en la opción,
- 1 posición corta (venta) de $w_1 \equiv \partial w / \partial f_1$ unidades del futuro 1, y
- 1 posición larga (compra) de $-w_2 \equiv -\partial w / \partial f_2$ unidades del futuro 2

Si denotamos por Π el valor del portafolio:

$$\Pi = w - w_1 f_1 - w_2 f_2 \quad (40)$$

El incremento en el valor del portafolio en un pequeño intervalo de tiempo es

$$\begin{aligned} d\Pi &= dw - w_1 df_1 - w_2 df_2 \\ \text{sustituyendo 39:} \\ \rightarrow d\Pi &= \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial f_1^2} df_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial f_2^2} df_2^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial f_1 \partial f_2} df_1 df_2 \end{aligned}$$

O bien

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^2 v_1^2 x_1^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \delta_1} \right)^2 s_1^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^2 v_2^2 x_2^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} \right)^2 s_2^2 + 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_1} v_1 s_1 x_1 \rho_{11}^2 + 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} v_1 s_2 x_1 \rho_{12}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_1} v_2 s_1 x_2 \rho_{21}^2 + 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} v_2 s_2 x_2 \rho_{22}^2 + 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} v_1 v_2 x_1 x_2 \rho_{12}^2 + 2 \frac{\partial f_1}{\partial \delta_1} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} s_1 s_2 \rho_{12}^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^2 v_1^2 x_1^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \delta_1} \right)^2 s_1^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)^2 v_2^2 x_2^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} \right)^2 s_2^2 + 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_1} v_1 s_1 x_1 \rho_{11}^2 + 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} v_1 s_2 x_1 \rho_{12}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_1} v_2 s_1 x_2 \rho_{21}^2 + 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} v_2 s_2 x_2 \rho_{22}^2 + 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} v_1 v_2 x_1 x_2 \rho_{12}^2 + 2 \frac{\partial f_2}{\partial \delta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} s_1 s_2 \rho_{12}^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} v_1^2 x_1^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_1} v_1 s_1 x_1 \rho_{11}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} v_1 s_2 x_1 \rho_{12}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} v_1 s_1 x_1 \rho_{11}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} v_1 s_2 x_1 \rho_{12}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} v_1 s_2 x_1 \rho_{12}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} v_2^2 x_2^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_1} v_2 s_1 x_2 \rho_{21}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} v_2 s_2 x_2 \rho_{22}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} v_2 s_1 x_2 \rho_{21}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_1} v_2 s_2 x_2 \rho_{22}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} s_1 s_2 \rho_{12}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_1} s_2 s_1 \rho_{21}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} s_1 s_2 \rho_{12}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_1} s_2 s_1 \rho_{21}^2 \right) dt \end{aligned} \quad (41)$$

En relación a la inversión inicial requerida II, nótese que la función $w(\cdot)$ es lineal homogénea en f_1 y f_2 , luego por el Teorema de Euler,

$$w = w_1 f_1 + w_2 f_2$$

Por lo tanto, la inversión inicial requerida para formar el portafolio libre de riesgo (40) es cero. Esto significa que para eliminar el riesgo se requiere eliminar toda la inversión. Por esto, en ausencia de oportunidades de arbitraje, el retorno de esta inversión en un pequeño intervalo de tiempo (ecuación 41) también debe ser cero. Como (41) no incluye la tasa de interés, la solución tampoco depende de ella, luego hemos probado $RHO = 0$.

V. Resumen y Conclusiones

En 1973 Black y Scholes obtuvieron una fórmula analítica que entrega el valor de una opción sobre acciones en función de cinco parámetros: el precio del activo subyacente, el precio de ejercicio, la tasa de interés libre de riesgo, la

volatilidad del activo subyacente y el tiempo hasta la madurez del contrato. Posteriormente, en 1978, Margrabe extendió el análisis de Black y Scholes para estudiar una opción que consiste en cambiar un activo riesgoso por otro, suponiendo idénticos procesos estocásticos que en B-S. Una particularidad interesante de la fórmula que encontró es que era independiente de la tasa de interés libre de riesgo, por lo que el riesgo de tasas de interés de esa opción era cero. En el presente artículo hemos extendido el trabajo de Margrabe para incluir una tasa de dividendo (constante) y procesos estocásticos que incluyen reversión a la media. Estos últimos describen mejor las series de precios de *commodities* e incluyen retornos por conveniencia estocásticos (necesarios para tomar en cuenta cambios en la estructura temporal de precios futuros, por ejemplo desde *backwardation* a *contango* y viceversa).

La conclusión del trabajo es que la propiedad de independencia de la tasa de interés se mantiene con tasa de dividendo constante y con reversión a la media y retorno por conveniencia estocástico de *commodities* comerciales. En este último caso es posible formar un portafolio libre de riesgo que no requiere inversión inicial tomando posición en la opción y en futuros sobre el precio de los *commodities*, que sí son activos transados.

Notas

1. *Commercial commodities*, como los llama Schwartz (1997) o *commodities* que son activos de consumo. *Consumption assets*, como los denota Hull (1999), se refiere a *commodities* que son demandados principalmente por su uso productivo, por ejemplo, petróleo o cobre. En contraste están los metales preciosos, que Hull (1999) llama activos de inversión, *investment assets*, y cuya característica es que se trata de activos mantenidos con propósitos de inversión por un número significativo de inversionistas, por ejemplo oro o plata.
2. Esta fórmula se obtiene tomando la derivada parcial con respecto a r en la fórmula anterior.
3. No es exactamente así porque el ejercicio no es seguro, pero en probabilidad lo es, y la intuición es la misma: las opciones son instrumentos con *leverage* implícito.
4. Conviene notar, sin embargo, que este resultado supone que las otras variables están constantes, pero en la práctica cuando suben las tasas de interés además tienden a caer los precios de las acciones, y viceversa (así es como se ajusta el mercado al nuevo retorno esperado exigido a la acción), por lo que el efecto final de un cambio en tasas de interés puede ser diferente.
5. La propiedad de homogeneidad lineal de la opción es crítica en este resultado, pues ella implica que el portafolio libre de riesgo es de cero inversión inicial, por lo cual debe ganar cero rentabilidad en equilibrio.
6. Estamos suponiendo que no hay dividendos, pues de otro modo la apreciación del activo no compensa totalmente en equilibrio, debe sumársele la tasa de dividendos.
7. Si el retorno por conveniencia es menor al costo de llevar (definido como la suma de la tasa de interés libre de riesgo y la tasa de costo de almacenaje), los precios futuros crecen con el vencimiento del contrato, situación que se conoce como normal *backwardation*. Si es mayor al costo de llevar, los precios futuros disminuyen al aumentar el vencimiento de los contratos, lo que se conoce como *contango*. Con un retorno por conveniencia constante (y tasas de interés constantes) la estructura temporal de precios futuros sería siempre creciente o siempre decreciente, pero en la realidad se observan cambios en la estructura temporal.
8. El problema que enfrentamos para formar un portafolio de arbitraje que incluya la opción y el activo, es que el activo entrega beneficios (resúmenes en el retorno por conveniencia) que no son iguales para todos los participantes en el mercado, el precio reflejaría el retorno por conveniencia marginal. Por ejemplo, un inversionista que no usa el *commodity* productivamente tendría un re-

torno por conveniencia igual a cero, y los que lo usan productivamente tienen diferentes retornos por conveniencia que influyen en su decisión de inventario.

9. Las opciones sobre futuros se transan en varias bolsas, y son especialmente populares en el caso de *commodities*, porque es más barato o más conveniente entregar contratos futuros sobre el *commodity* que el *commodity* mismo. Usualmente el contrato futuro madura poco después del vencimiento de la opción. Cuando el tenedor de la opción la ejerce, recibe una posición larga en el futuro más un monto en dinero igual a la diferencia entre el precio futuro y el precio de ejercicio. La posición en futuros puede ser cerrada inmediatamente, a cero costo. Luego el pago de la opción sobre futuro es igual al pago de una opción sobre el subyacente, reemplazando el precio *spot* por el precio futuro.

Referencias

- BRENNAN, M. (1958). "The Supply of Storage", *American Economic Review*, 48, pp. 50-72.
- BRENNAN, M. y E. SCHWARTZ (1979). "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, 3, pp. 133-155.
- BRENNAN, M. y E. SCHWARTZ (1982). "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17 (3), September, pp. 301-328.
- CARR, P. (1988). "The Valuation of Sequential Exchange Opportunities", *Journal of Finance*, 43 (5), December, pp. 1235-1256.
- COX, J., S. ROSS y M. RUBINSTEIN (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics* 7, pp. 229-263.
- GESKE, R. (1977). "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, November, pp. 541-552.
- GIBSON, R. y E. SCHWARTZ (1990). "Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims", *Journal of Finance*, 45 (3), July, pp. 959-976.
- HULL, J. (1999). *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Prentice Hall, Fourth Edition.
- LAVARD, P.-R. y A.-A. WALTERS. (1978). *Microeconomic Theory*, McGraw Hill.
- MARGRABE, W. (1978). "The Value of An Option to Exchange one Asset for Another", *Journal of Finance*, 33 (1), March, pp. 177-186.
- MERTON, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, Spring, pp. 141-83.
- ROSS, S. (1997). "Hedging Long Run Commitments: Exercises in Incomplete Market Pricing", *Economic Notes*, Nº 2, pp. 385-420.
- ROUTLEDGE, B. R., D. J. SEPP y CH. S. SPATT (1988). "The Spark Spread: An Equilibrium Model of Cross-Commodity Price Relationships in Electricity", *Working Paper*, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University (presentado en: The Winter AEA Meetings in New York, enero 1999).
- ROUTLEDGE, B. R., D. J. SEPP y CH. S. SPATT (1999). "Equilibrium Forward Curves for *Commodities*", *Working Paper*, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, abril.
- SCHWARTZ, E. (1997). "The Stochastic Behavior of *Commodity* Prices: Implications for Valuation and Hedging", *Journal of Finance*, 70 (3), July, pp. 973-973.
- SCHWARTZ, E. (1988). "Valuing Long-Term *Commodity Assets*", *Financial Management*, 27 (1), Spring, pp. 57-66.
- TELSER, L. (1958). "Futures Trading and the Storage of Cotton and Wheat", *Journal of Political Economy*, 66, pp. 133-144.