

MODELOS Y REALIDAD: ENSEÑANDO MACROECONOMIA EN LOS NOVENTA, UNA NOTA

ROBERTO MUÑOZ LAGOS*

Universidad de Chile

Abstract

This note is intended to suggest an improvement to the methodology used by Quiroz et al. (1991) in the paper: "Modelos y Realidad: Enseñando Macroeconomía en los Noventa", which was published in the Revista de Análisis Económico. Besides, this notes establishes a superior numeric procedure to solve out the quadratic linear algorithm used by Quiroz et al.

I. Formulación General del Algoritmo Lineal Cuadrático

La utilización de técnicas de modelación sobre la base de parámetros profundos surgió como una de las alternativas posibles para enfrentar la crítica de Lucas, pues permiten establecer un nexo más riguroso entre modelos teóricos y resultados empíricos. A fines de 1991, Quiroz et al. publicaron el artículo "Modelos y realidad: Enseñando macroeconomía en los noventa", con el propósito de ilustrar la utilización de esta técnica. Esta nota complementa al artículo original, estableciendo algunas correcciones al planteamiento del algoritmo propuesto.

El problema general planteado por Quiroz et al. consiste en resolver:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \text{ s.a.} \\ x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1}), x_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

* Agradezco los comentarios de José Miguel Sánchez y Ricardo Paredes a una versión anterior de esta nota, así como a dos comentaristas anónimos. Eventuales errores son de mi responsabilidad.

donde β es un factor de descuento, x_t es un vector de $(m \times 1)$ de variables de estado en el tiempo t y u_t es un vector de $(n \times 1)$ de variables de control en t , $r(\cdot)$ es la función de retorno constante en el tiempo, la restricción dinámica depende de ε_{t+1} que es un vector de $(m \times 1)$ de variables aleatorias i.i.d. en el tiempo y E_t es el operador de esperanza condicional a la información disponible en t . La primera etapa del algoritmo consiste en la determinación del estado estacionario $\bar{y} \equiv \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$. Una vez hallado el estado estacionario se debe construir la expansión de Taylor en torno a él. Para simplificar el problema, se trabaja con restricciones lineales, es decir, la dinámica es de la forma:

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1}) = Ax_t + Bu_t + C\varepsilon_{t+1}, \quad x_0 \text{ dado}$$

donde $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. La matriz $C \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ contiene la descomposición de Cholesky de la matriz de varianzas y covarianzas de las variables aleatorias.

Para resolver el problema original, es necesario plantearlo de la siguiente forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [x_t' Q x_t + u_t' R u_t + 2x_t' W u_t] \\ \text{s.a. } x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + C\varepsilon_{t+1}, \quad x_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

Esta reformulación no es directa y debe ser realizada de manera cuidadosa. El desarrollo de Taylor de segundo orden de $r(y)$ en torno al estado estacionario $\bar{y}$ se puede escribir como:

$$r(x, u) \approx x' Q x + u' R u + 2x' W u \quad x = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, u = u$$

con

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_x & (r_x - H_x \bar{x} - H_{xu} \bar{u}) \\ (r_x - H_x \bar{x} - H_{xu} \bar{u})' & q \end{bmatrix}$$

$$R = \frac{1}{2} H_u, \quad W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r'_u - \bar{x}' H_{xu} - \bar{u}' H_u \end{bmatrix}$$

$$q = 2r + \bar{x}' H_x \bar{x} - 2r'_x \bar{x} - 2r'_u \bar{u} + \bar{u}' H_u \bar{u} + \bar{x}' H_{xu} \bar{u}$$

donde:

$$r = r(\bar{y}), \quad r_x = \frac{\partial r}{\partial x}(\bar{y}), \quad r_u = \frac{\partial r}{\partial u}(\bar{y}), \quad H_x = H_x r(\bar{y}), \quad H_u = H_u r(\bar{y})$$

$$Hr(\bar{y}) = \begin{bmatrix} H_x & r(\bar{y}) \\ H_{ux} & r(\bar{y}) \end{bmatrix} \in M_{(m+n) \times (m+n)}(IR)$$

Se supone además que $r \in C^2(\Omega)$, Ω dominio de r , lo que permite hacer:

$$H'_{ux} r(\bar{y}) = H_{xu} r(\bar{y}) = H_{xu}$$

Por otro lado, la dinámica del sistema debe reescribirse como:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + C\varepsilon_{t+1}$$

Lo cual se logra fácilmente redefiniendo:

$$A \equiv \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}, \quad B \equiv \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times n}, \quad C \equiv \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times m}$$

De tal forma el problema original queda de la forma requerida, esto es:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [x'_t Q x_t + u'_t R u_t + 2x'_t W u_t] \\ & \text{s.a. } x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + C\varepsilon_{t+1}, \quad x_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

Una vez obtenida esta formulación, el método de solución es ampliamente conocido (Sargent, 1987), y no será reproducido aquí.

II. Diferencias Encontradas

Del análisis de la formulación estándar de Quiroz et al. se aprecia (pg. 86) que se cometieron las siguientes omisiones:

- 1.- La expresión análoga al "q" es: $q_{nsns} = 2r + \bar{x}' H_x \bar{x} - 2r'_x \bar{x}$, de tal forma se omitieron los términos dependientes de la variable de control. Estos son: $-2r'_u \bar{u} + \bar{u}' H_u \bar{u} + \bar{x}' H_{xu} \bar{u}$.
- 2.- La expresión en Q: $r'_x \bar{x} - H_x \bar{x} - H_{xu} \bar{u}$, tiene su análogo dado por: $q_{nsa} = r'_x \bar{x} - H_x \bar{x}$, de tal forma se omitió el último término dependiente de la variable de control en estado estacionario.
- 3.- La expresión en W: $r'_u \bar{x} - \bar{x}' H_{xu} \bar{u} - \bar{u}' H_u \bar{u}$, tiene su análogo dado por: $W_{ma} = r'_u \bar{x} - \bar{x}' H_{xu}$; donde nuevamente se omitió el término que contiene el valor de la variable de control en estado estacionario.

Es claro, entonces, que con tales omisiones el método desarrollado por Quiroz et al. es imperfecto y susceptible de ser mejorado. Nótese que si las variables de

control en estado estacionario toman el valor cero, en la práctica no se cometería error alguno, sin embargo, como se verá más adelante, éste no es el caso para los ejemplos allí desarrollados.

Existe una forma alternativa de obtener la formulación estándar del problema lineal cuadrático, donde se trabaja en desviaciones del estado estacionario, la cual tiene al menos dos ventajas:

- Simplifica las expresiones para las matrices a obtener.
- Representa menos operaciones algebraicas, lo cual disminuye la presencia de un error numérico de propagación.

Se mostrará entonces que el procedimiento utilizado puede ser numéricamente mejorado trabajando en desviaciones del estado estacionario, pues el número de operaciones necesarias resultará menor.

Para ello basta redefinir las matrices:

$$A \equiv \begin{bmatrix} A & (A-I)\bar{x} + B\bar{u} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B \equiv \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C \equiv \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_x & r_x \\ r_x' & 2r \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{2} H_u, \quad W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_{xu} \\ r_u' \end{bmatrix}$$

De manera que con:

$$x = \begin{bmatrix} (x - \bar{x}) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = u - \bar{u}$$

el problema de optimización queda:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [x_t' Q x_t + u_t' R u_t + 2x_t' W u_t] \\ \text{s.a. } x_{t+1} = A x_t + B u_t + C \varepsilon_{t+1}, \quad x_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

En este caso la solución queda expresada en desviaciones del estado estacionario. Es fácil ver que el número de operaciones algebraicas en este caso es considerablemente menor, de manera que, desde el punto de vista numérico, resulta ser un método más conveniente.

III. Discusión y Conclusiones

En esta nota se ha mostrado que la versión del algoritmo lineal cuadrático de Quiroz et al. presenta algunas omisiones en la formulación estándar del problema, las cuales fueron corregidas en la sección anterior. Para ilustrar la magnitud del error cometido producto de dichas omisiones, se realizó un ejercicio de programación del algoritmo lineal cuadrático corregido en Gauss 2.0 y se recalibró el modelo 1 reportado en el artículo original. Cabe destacar que dicho modelo

corresponde a un modelo simple de crecimiento estocástico, que fue aplicado a los casos de Bolivia, Perú y Chile. Dado que los mejores resultados fueron los obtenidos en el caso boliviano, se considerará sólo este último caso para efectos de ilustrar las mejoras. Más aún, en la nueva calibración no se consideró el mejoramiento numérico propuesto, es decir, no se trabajó en desviaciones del estado estacionario.

El estado estacionario reportado por Quiroz et al. de la variable de control es distinto de cero, lo que indica que es posible obtener mejoras. Los resultados de la simulación mostraron que la norma euclídeana del vector de diferencias entre los estadísticos reales considerados en el artículo (pg. 89) y los obtenidos con el modelo mejorado, es del orden de un tercio de la misma norma tomando los estadísticos obtenidos del modelo original, de manera que constituye una mejora significativa en el poder explicativo del modelo. Los parámetros originales se modificaron, el coeficiente de autocorrelación aumentó de 0.9 a 0.975, mientras que la varianza del shock productivo creció de 0.01 a 0.03. Esto significa que los shocks que mejor modelan la economía boliviana en este modelo son más persistentes y tienen mayor varianza que lo que se reportó previamente.

Referencias

- KYDLAND, F. y E. PRESCOTT (1982), "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *Econometrica*, 50.
- LUCAS, R.E. JR. (1976), "Econometric Policy Evaluation: A Critique", 19-46, *The Phillips Curve and Labor Markets*, ed. K. Brunner and A. H. Metzler, North Holland Publishing Co.
- MC. GRATTAN, E. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Linear-Quadratic Approximation", *Journal of Business & Economics Statistics*, Vol. 8, N° 1.
- PRESCOTT, E. (1991), "Real Business Cycle Theory: What Have we Learned", *Revista de Análisis Económico*, Vol. 6, N° 2.
- QUIROZ, J., F. BERNASCONI, R. CHUMACERO y C. REVOREDO (1991), "Modelos y Realidad: Enseñando Macroeconomía en los Noventa", 79-103, *Revista de Análisis Económico*, Vol. 6, N° 2.
- SARGENT, T. (1981), "The Observational Equivalence of Natural and Unnatural Rate Theories of Macroeconomics", *Rational Expectation and Econometric Practice*. Lucas, R. y T. Sargent eds., Vol II.
- SARGENT, T. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press.